Rješenje nagradnog natječaja br. 209

Odredi $x^2+y^2+z^2$ ako su x, y i z pozitivni cijeli brojevi takvi da je

$$7x^2-3y^2+4z^2=8 \tag{1}$$

$$16x^2-7y^2+9z^2=-3. \tag{2}$$

Prvo rješenje. Iz $16\cdot(1)-7\cdot(2)$ imamo $y^2+z^2=149$, a iz $7\cdot(1)-3\cdot(2)$ dobivamo $x^2+z^2=65$. Mogućnosti su $(y,z)\in\{(10,7),(7,10)\}$ i $(x,z)\in\{(1,8),(8,1),(7,4),(4,7)\}$. Odavde dobivamo $z=7$, $x=4$ i $y=10$. Kako ove vrijednosti zadovoljavaju dane jednadžbe slijedi $x^2+y^2+z^2=165$.

Drugo rješenje. Promatrajmo sistem jednadžbi

$$7x^2-3y^2+4z^2=8$$

$$16x^2-7y^2+9z^2=-3$$

$$x^2+y^2+z^2=S$$

kao sistem lineranih jednadžbi po x^2, y^2, z^2. Rješavanjem dobivamo $x^2=S-149$, $y^2=S-65$, $z^2=214-S$. Kako su x^2, y^2, z^2 pozitivni brojevi imamo $149<S<214$. Kako $S-65$ mora biti potpun kvadrat dobivamo $S\in\{165,186,209\}$. Za ove vrijednosti je $214-S\in\{49,28,5\}$, Ovdje je samo 49 potpuni kvadrat i $S=214-49=165$. Nadalje je $165-149$ također potpuni kvadrat, odakle slijedi da je traženi zbroj jednak 165.

Knjigom Darko Žubrinić, *Diskretna matematika*, Element, Zagreb, 2012. nagrađeni su ovi rješavatelji:

1. *Dario Domnjanić* (3), XV. gimnazija, Zagreb;
2. *Sara Džebo* (3), Peta gimnazija, Sarajevo, BiH;
3. *Petar Orlić* (3), XV. gimnazija, Zagreb.

Riješili zadatke iz br. 2/258

(Broj u zagradi označava razred–godište srednje–osnovne škole.)

a) Iz matematike: *Sara Džebo* (3), Peta gimnazija, Sarajevo, BiH, 3441–3446, 3448–3454; *Petar Orlić* (3), XV. gimnazija, Zagreb, 3441–3446, 3448–3453; *Zlatko Petolas* (2), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 3441–3454.

b) Iz fizike: *Ivan Brnelić* (8), OŠ Ivana Goran Kovačića, Delnice, 385; *Corina Jakovac* (8), OŠ Ivana Goran Kovačića, Delnice, 383; *Ante Šego* (8), OŠ Horvati, Zagreb, 382, 384.

Nagradni natječaj br. 211

Dokaži nejedankost

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\leq\frac{1}{4}(a+b+c).$$